

Evenwicht en eenheden



1.1 De beide kantoorgebouwen Puerta de Europe in Madrid staan onder een hoek van 15° en zijn elk in evenwicht.



1.2 Nieuwe Betlembrug bij Muiden over het Amsterdam-Rijnkanaal. Ook tijdens de bouw moet een constructie in evenwicht zijn.

Bouwwerken – of het nu gaat om bijvoorbeeld een kantoorgebouw of een verkeersbrug (afb. 1.1 en 1.2) – moeten in evenwicht zijn. Maar wat betekent ‘in evenwicht zijn’ in de bouwpraktijk? In constructieberekeningen wordt het evenwicht beschreven met drie evenwichtsvergelijkingen. In dit hoofdstuk wordt het evenwicht ook beschouwd vanuit ‘het in balans’ zijn; een situatie die iedereen in het dagelijkse leven regelmatig ervaart.

In elke constructieve berekening moet het evenwicht worden aangetoond. De draagconstructie zal dat evenwicht moeten garanderen door weerstand te bieden aan alle er op in werkende krachten. In de bouwpraktijk worden die krachten belastingen genoemd.

De wetten van Newton – genoemd naar de Engelse natuur- en wiskundige Isaac Newton (1643-1727) – vormen de natuurkundige basis voor het berekenen van alle krachten op en in een constructie. Dit boek gaat uit van krachten in *statische* toestand, dat wil zeggen dat de constructie niet beweegt, en dus stilstaat. Het bepalen van het evenwicht van bewegende ofwel *dynamische* krachten is een stuk lastiger. Daarom worden dynamische krachten in de praktijk vaak vertaald naar statische krachten. Voorbeelden zijn windbelasting op een gebouw en remkrachten op een brug. De eenheid van kracht is newton, volgens het internationale stelsel van eenheden (SI of *Système Internationale d’unités*). Ook andere grootheden worden uitgedrukt in eenheden van het SI-stelsel. Belangrijk is deze eenheden te kennen en consequent te hanteren. Naast correct gebruik van eenheden moet je je bewust zijn van de nauwkeurigheid van de uitkomst van een berekening. Welke getsalgs grootte daarbij hoort wordt ook in dit hoofdstuk beschreven.

1.1 Wetten van Newton

De toegepaste mechanica is gebaseerd op de vier wetten van Newton: de eerste, de tweede, de derde én de gravitatiewet. Voor het in evenwicht zijn van een constructie zijn deze vier wetten gelijktijdig van toepassing.

De eerste wet van Newton beschrijft de toestand waarin een lichaam zich wil bevinden. Onder invloed van een externe kracht F gaat deze toestand over in de tweede wet van Newton, die in formulevorm luidt:

$$F = m \cdot a \text{ (kg} \cdot \text{m/s}^2\text{)} \quad (1.1)$$

Hierin is:

m massa in kg;

a versnelling in m/s^2 .

Een kracht wordt daardoor uitgedrukt in $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Dit is tevens de eenheid van kracht, de newton, met symbool N. 1 newton is de kracht die een massa van 1 kg een versnelling geeft van 1 m/s^2 .

Gravitatiewet

Een groot aantal krachten op constructies wordt veroorzaakt door de zwaartekracht. De zwaartekracht is een gevolg van de onderlinge aantrekkingskracht van een lichaam met de aarde.

Alle stoffelijke massa's ondervinden voortdurend zwaartekracht. In de bouwpraktijk zijn zwaartekrachten op constructies aanwezig, als gevolg van:

- eigen gewichten van constructiematerialen, afwerklagen, plafonds, leidingen en dergelijke;
- krachten die voorvloeien uit het gebruik, bijvoorbeeld door voertuigen, personen en meubilair;
- krachten door natuurverschijnselen zoals sneeuw, regenwater en grondwater.

De gravitatiewet levert de formule voor de zwaartekracht F (afb. 1.3):

$$F = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.2)$$

Hierin is:

f gravitatieconstante ($f = 0,667 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$);

m_1 massa van de aarde ($m_1 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$);

m_2 massa van het lichaam;

r afstand tussen de zwaartepunten van de massa.

De gravitatiewet is uiteraard ook van toepassing op de aarde en elk bouwwerk dat op de aarde is gebouwd. De afmetingen van een bouwwerk (hoe groot ook) zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de afmetingen van de aarde. Dat betekent dat de afstand r tussen het zwaartepunt van de aarde (met massa m_1)

Eerste wet van Newton (traagheidswet)

Elk lichaam is in rust, of in een constante rechtlijnige beweging en blijft volharden in die beweging, tenzij er een externe kracht op werkt (waardoor de tweede wet in werking treedt).

Tweede wet van Newton (bewegingswet)

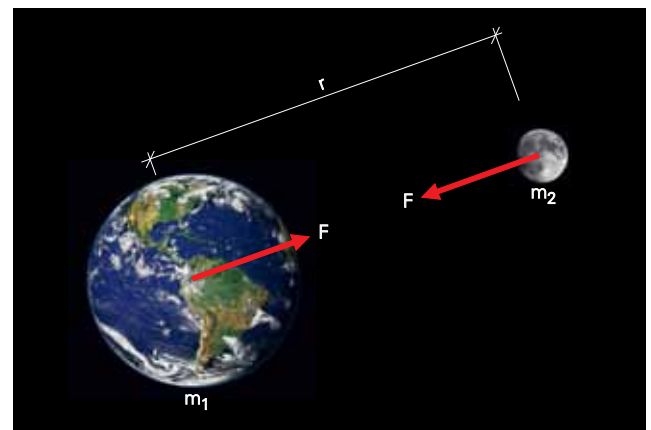
Wanneer op een lichaam een kracht F wordt uitgeoefend krijgt het lichaam een versnelling (in de richting van die kracht) die in grootte evenredig is met F .

Derde wet van Newton (actie = reactie)

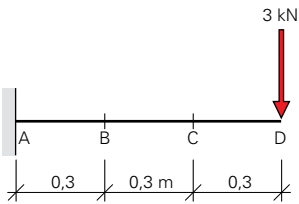
Twee lichamen die met elkaar in evenwicht zijn oefenen op elkaar een even grote, maar tegengestelde gerichte kracht uit. Kortweg: actie = reactie.

Gravitatiewet van Newton

Twee stoffelijke lichamen oefenen op elkaar een (gravitatie)kracht uit die recht evenredig is met hun massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun onderlinge afstand van de zwaartepunten.



1.3 Massa's oefenen op elkaar een aantrekkingskracht uit.

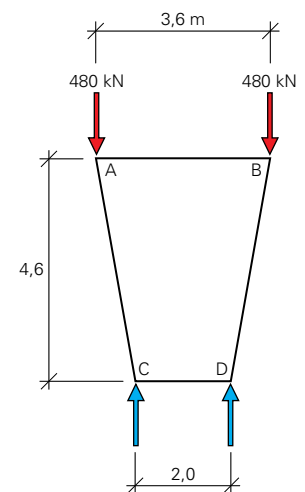


2.32 Trap in een woning met éézijdig uitkragende treden.

- 4 De treden van een trap in een woning zijn aan één zijde (A) ingeklemd in een wand. Op het uiteinde (D) wordt de trede belast op een verticale kracht van 3 kN (afb. 2.32).
- Bereken de krachten (een moment is ook een kracht!) die in snede C werken en teken liggerdeel AC met de krachten die op snede C werken.
 - Bereken de krachten die in snede B werken en teken liggerdeel AB met de krachten die op snede B werken.
 - Bereken de krachten die in snede A werken en teken knoop A met alle krachten die op knoop A werken (actie- en reactiekrachten).

- 5 Een loopbrug tussen twee schoolgebouwen ligt aan één zijde op een betonnen trapeziumvormige ondersteuningsconstructie (afb. 2.33). Op de bovenrand van de ondersteuningsconstructie grijpen vanuit de opleggingen van de loopbrug twee krachten aan van elk 480 kN. De vragen gaan uitsluitend over het effect van de oplegkrachten van de loopbrug op de ondersteuningsconstructie; het eigen gewicht van ondersteuningsconstructie blijft buiten beschouwing.
- Teken voor knoop A een krachtenparallelogram en bereken de kracht in de bovenbalk (AB) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
 - Bereken voor knoop C de reactiekracht vanuit de fundering. Teken vervolgens voor knoop C een krachtenparallelogram en bereken de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is.
 - Teken voor knoop C twee verschillende krachtenveelhoeken, waarbij de kracht vanuit de fundering evenwicht maakt met de kracht in de onderbalk (CD) en in de schuine kolom (AC).
 - Er is een voorstel om het ontwerp van de ondersteuningsconstructie aan de passen door van het trapezium een driehoek te maken. De lengte van de onderbalk CD wordt dan teruggebracht van 2 m naar 0 m. Wat betekent dit voorstel voor de grootte van de kracht in de bovenbalk en in de schuine kolom? Licht je antwoord toe door het op schaal schetsen van het krachtenparallelogram voor het trapezium en voor de driehoek.

2.33 Loopbrug van het Mondriaancollege in Den Haag met links de trapeziumvormige ondersteuningsconstructie.



6

Een betonnen brug voor wegverkeer over een singel in een woonwijk wordt op locatie gestort en vanaf het bouwterrein op zijn plaats gehesen (afb. 2.34). De brug heeft een gewicht van 3500 kN (350 ton in de hijswereld). Om extra spanningen in de constructie te voorkomen wordt rechtstandig gehesen door een hijsconstructie met meerdere evenaars die op maat zijn gemaakt. De bovenste evenaar heeft een maximale hijscapaciteit van 7200 kN.

- Teken voor knoop A (bovenste evenaar) een krachtenparallelogram en bereken de kracht in de evenaar (AB) en in de schuine hijskabel (AC). Geef ook aan of het een trek- of een drukkracht is. De hoek van de schuine hijskabel met de evenaar is 70° .
- De hoek van de schuine hijskabel kan worden aangepast aan de hijsituatie. Het bovenste hijs oog (knoop C) kan volgens opgave van kraanleverancier in de richting van de schuine hijskabel een kracht opnemen van maximaal 5900 kN. Bereken de hoek tussen de schuine hijskabel en de evenaar die nog net toelaatbaar is.
- De schuine hijskabels van de onderste evenaars maken eveneens een hoek van 70° met de evenaar. Hoe groot zijn de krachten in de onderste evenaars en in de schuine hijskabels? Maak gebruik van de resultaten van vraag a.



2.34 Inhijsen van een (op locatie gestorte) betonnen brug over een singel in een woonwijk in Capelle aan den IJssel.

3.3 Onderslagbalk van een fiets- en voetgangersbrug

De constructie van een fiets- en voetgangersbrug over een singel is opgebouwd door een stapeling van een aantal staafvormige elementen (afb. 3.7). Het dek is opgebouwd uit vijf hardhouten langsliggers met daarop in dwarsrichting hardhouten planken. Elke houten langsligger levert een geconcentreerde belasting (puntlast) op een betonnen onderslagbalk (afb. 3.8). De houten langsliggers zijn vrij opgelegd op de onderslagbalk. De betonnen onderslagbalk ($b \times h = 300 \times 350 \text{ mm}^2$) is opgelegd op twee betonnen funderingspalen. Deze palen hebben bóven de bodem van de singel de functie van kolom en ín de bodem de functie van funderingspaal.

De verbinding (een paar stekken betonstaal) tussen de betonnen funderingspalen en de prefab betonnen onderslagbalk maakt het mogelijk dat de balk vrij kan doorbuigen op de palen. Bij een verticale belasting buigt de balk iets door en willen de opleggingen (de palen) een heel klein beetje zijdelings verplaatsen. De palen verhinderen deze zeer geringe verplaatsing niet of nauwelijks, omdat ze een aantal meters boven de grond uitsteken en meebuigen. Daarnaast geeft de grond waarin de palen staan relatief gemakkelijk mee.

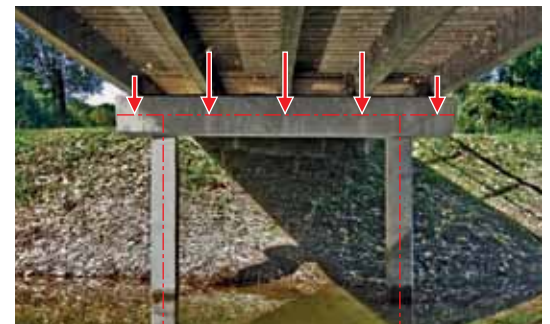
Voor het berekenen van de uitwendige krachten wordt de onderslagbalk eerst 'vrij gemaakt' van zijn omgeving (de hardhouten langsliggers en de funderingspalen). Het 'vrij lichaam schema' (VLS) van de betonnen onderslagbalk is eenvoudig: een lijn opgelegd op een scharnier en een rolscharnier met daarop de vijf puntlasten van het brugdek (afb. 3.9). De scharnieren in het schema geven aan dat de onderslagbalk kan roteren op de funderingspalen (en dus niet of nauwelijks wordt ingeklemd). Het rolscharnier geeft aan dat de opleggingen zijdelings kunnen verplaatsen. Er mag ook maar één rolscharnier worden getekend, omdat anders de constructie instabiel is. Het maakt voor de krachten in en op de ligger niet uit of het rolscharnier links of rechts wordt getekend.

De belastingen op de onderslagbalk ontstaan door:

- eigen gewicht van de betonnen onderslagbalk zelf: dit is een gelijkmatig verdeelde lijnlast q ;
- eigen gewicht van het houten brugdek (langsliggers en planken) in combinatie met de verkeersbelasting op het brugdek: dit zijn de puntlasten F_1 en F_2 .



3.7 Fiets- en voetgangers brug over een singel.



3.8 Krachten vanuit de houten langsliggers op de systeemlijn van de betonnen onderslagbalk.

De rekenwaarden van de belastingen voor de sterkteberekening zijn vastgesteld op:

$F_1 = 13,8 \text{ kN}$ oplegreactie houten randliggers
 $F_2 = 24,8 \text{ kN}$ oplegreactie houten tussenliggers
 $q = 2,90 \text{ kN/m}$ eigen gewicht betonnen onderslagbalk

Merk op dat het korte stuk dat de onderslagbalk buiten de langsliggers uitsteekt voor de eenvoud van de schematisering is verwaarloosd. Dit is verantwoord, omdat de belasting door het eigen gewicht relatief klein is en het verwaarlozen van dit stukje balk het berekeningsresultaat nauwelijks beïnvloed. De onderslagbalk moet uitwendig in evenwicht zijn. De oplegreacties zijn de enige, nog onbekende krachten.

Gevraagd: bereken de oplegreacties

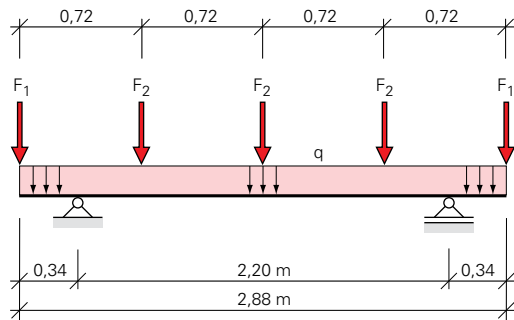
De berekening van de oplegreacties verloopt in drie stappen.

1. Teken de oplegreacties in het schema

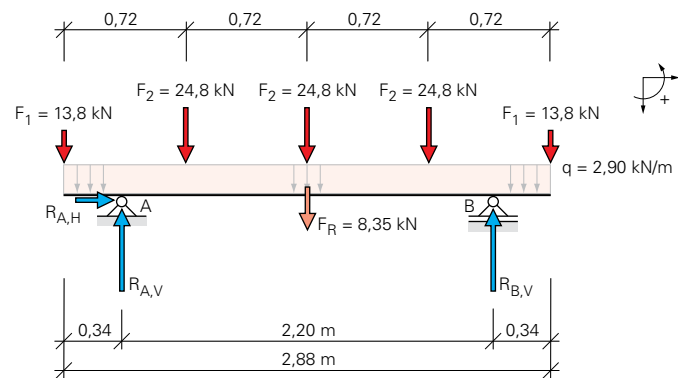
Neem de oplegreacties alvast in de juiste richting aan, wanneer dat inzicht aanwezig is (afb. 3.10). Na de berekening volgt de juistheid van de aanname.

2. Bereken de grootte en de plaats van de resultante van de q-last

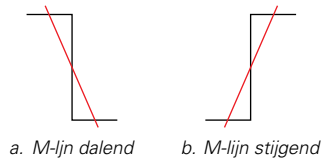
Voor het berekenen van de oplegreacties wordt de q-last vervangen door een puntlast F_R , die in het zwaartepunt van de q-last aangrijpt. De puntlast heeft voor het berekenen van de oplegreacties hetzelfde effect als de q-last. De grootte van F_R bedraagt $F_R = q \text{ kN/m} \cdot 2,88 \text{ m} = 2,90 \cdot 2,88 = 8,35 \text{ kN}$. De plaats van F_R ligt op $2,88 \text{ m} / 2 = 1,44 \text{ m}$ vanaf de rand (links of rechts). De schematisering waarbij de q-last is vervangen door een resulterende kracht F_R is weergegeven in afbeelding 3.10.



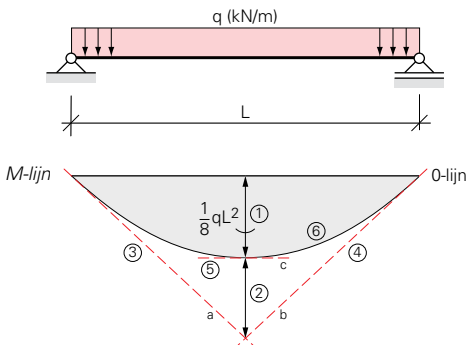
3.9 Constructie- en belastingschema van de betonnen onderslagbalk



3.10 Schema van de onderslagbalk met de belastingen en de onbekende oplegreacties $R_{A,H}$, $R_{A,V}$ en $R_{B,V}$.



4.18 Afschuiptekens voor de V-lijn met een dalende en een stijgende M-lijn.



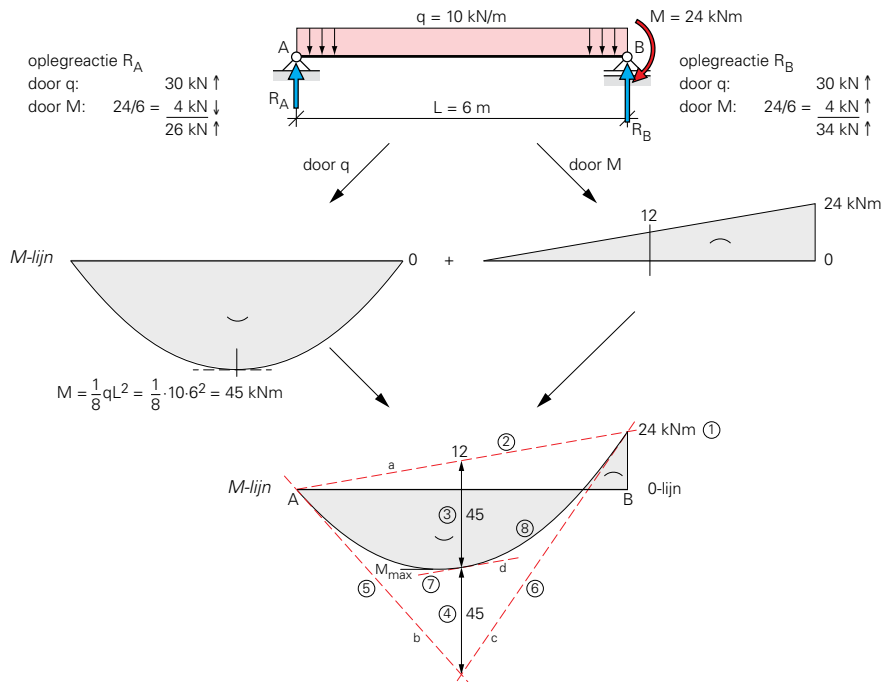
1. Zet verticaal uit de waarde $M = qL^2/8$.
2. Zet verticaal nogmaals uit de waarde $M = qL^2/8$.
3. Teken hulplijn a (is de raaklijn van de M-lijn ten opzichte van de linkeroplegging).
4. Teken hulplijn b (is de raaklijn van de M-lijn ten opzichte van de rechteroplegging).
5. Teken hulplijn c evenwijdig aan de O-lijn.
6. Schets de M-lijn (die raakt aan de hulplijnen a, b en c).

4.19 Tekenen van de M-lijn van een ligger met een q-last.

d. Het afschuipteken geeft aan of de M-lijn stijgt of daalt. Afbeelding 4.18 toont de relatie tussen het afschuipteken van de V-lijn en het stijgen of dalen van de M-lijn. Gebruik – nadat de V-lijn is getekend – dit inzicht bij het tekenen van de M-lijn.

Tekenen van de V- en M-lijn

- Gelijkmatig verdeelde lijnlasten op liggers komen vaak voor. Volg – of gebruik – voor het tekenen van de M-lijn de stappen 1 t/m 6 van afbeelding 4.19. Hierdoor wordt de M-lijn beter getekend.
- Bij doorgaande liggers treedt boven een tussensteunpunt altijd een moment op. Ook bij een ligger met een overstek treedt boven het steunpunt ter plaatse van het overstek altijd een moment op (zie afb. 4.16). Het berekenen en tekenen van de M-lijn van een ligger voor een gelijkmatig verdeelde q-last in combinatie met een moment M kan worden opgevat als twee deelsommen die worden samengevoegd (gesuperponeerd). In afbeelding 4.20 wordt dit toegelicht: op een ligger werkt een gelijkmatig verdeelde last $q = 10 \text{ kN/m}$ én gelijktijdig ter plaatse van een oplegging een moment $M = 24 \text{ kNm}$. Voor deze beide belastingen zijn eerst de bijbehorende oplegreacties berekend (controleer deze waarden). In dit voorbeeld wordt de M-lijn getekend in acht stappen.



4.20 Superponeren en tekenen van de M-lijn van een ligger belast door een q-last én een moment.

1. Zet uit boven B de waarde $M = 24 \text{ kNm}$.
2. Teken hulplijn a (van $M = 24 \text{ kNm}$ boven B naar $M = 0$ in A).
3. Zet verticaal uit de waarde $M = qL^2/8 = 45 \text{ kNm}$ (vanaf het midden van hulplijn a met waarde 12 kNm). Hulplijn a is de 'nullijn' van de momentenlijn door de q-last.
4. Zet verticaal nogmaals uit de waarde van $M = 45 \text{ kNm}$.
5. Teken hulplijn b (is de raaklijn van de M-lijn ten opzichte van de linkeroplegging).
6. Teken hulplijn c (is de raaklijn van de M-lijn ten opzichte van het moment boven de rechteroplegging).
7. Teken hulplijn d evenwijdig aan hulplijn a.
8. Schets de M-lijn (die raakt aan de hulplijnen b, c en d).

- c. Afbeelding 4.21 toont een vrij opgelegde ligger op twee steunpunten die gedeeltelijk is belast door een gelijkmatig verdeelde q-last. De V- en de M-lijn van deze ligger kan al kwalitatief goed worden geschetst door gebruik te maken van de eigenschappen van afbeelding. 4.17 (relatie met de belasting), afbeelding 4.18 (afschuifteken V-lijn) en afbeelding 4.20 (superpositie).

Relevante sneden voor het berekenen en tekenen van de V- en M-lijn

Het aantal sneden waar het moment en de dwarskracht moet worden berekend kan gelukkig beperkt blijven. Relevante sneden zijn:

- begin en einde van de staaf;
- alle oplettingen;
- overgangen van belastingen (begin en einde van q-lasten en ter plaatse van puntlasten);
- plaatsen waar de V-lijn de 0-lijn snijdt, immers daar treden de maximale momenten op.

In het positieve assenstelsel worden positieve dwarskrachten onder en negatieve dwarskrachten boven de x-as getekend. Dat betekent dat met het tekenen van de V-lijn rechts moet worden begonnen. In de praktijk (en ook in dit boek) wordt vaak links begonnen, dus ook in afbeelding 4.21. Het resultaat is dat de V-lijn dan gespiegeld is ten opzichte van de x-as en dus niet meer overeenkomt met de afspraak van het assenstelsel.

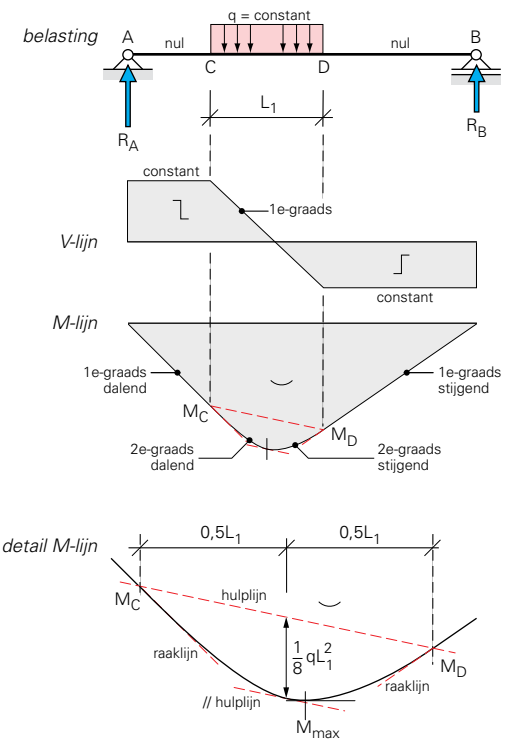
Het tekenen van de M-lijn gebeurt wel altijd strikt. Positieve momenten (buigteken: \smile) worden altijd onder de x-as getekend en negatieve momenten (buigteken: \frown) altijd erboven.

Let op: afschuiftekens in de V-lijn en buigtekens in de M-lijn mogen nooit ontbreken.

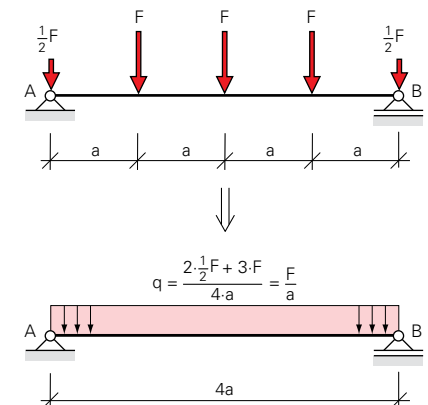
Meerdere puntlasten vervangen door een q-last

Schematiseer meerdere puntlasten op een ligger(deel) door een gelijkmatig verdeelde q-last (afb. 4.22). Het berekenen en tekenen van de V- en M-lijn verloopt dan doorgaans veel sneller. Hoe groter het aantal puntlasten is, des te nauwkeuriger zal de M-lijn van de q-last de M-lijn van de puntlasten benaderen. Ook wanneer de puntlasten en de afstanden tussen deze puntlasten niet even groot zijn, is het schematiseren tot een gelijkmatig verdeelde lijnlast toch mogelijk. Dat vraagt echter wel wat meer ervaring.

In paragraaf 4.5.2 (Rekenvoorbeeld onderslagbalk) wordt aangetoond dat bij drie puntlasten tussen de oplettingen van afbeelding 4.22 de M-lijn al goed overeenkomt met die van een q-last.



4.21 Relatie tussen de belasting en het verloop van de V-lijn en M-lijn.



4.22 Puntlasten kunnen worden geschematiseerd tot een gelijkmatig verdeelde lijnlast.

Voor elk spantdeel moeten nog drie onbekende krachten worden berekend: een horizontale oplegreactie en twee scharnierkrachten. Met de drie evenwichtsvergelijkingen zijn deze onbekende krachten te berekenen. Het maakt niet uit met welk spantdeel wordt begonnen.

Evenwicht spantdeel ACS:

$$\Sigma M_{\text{om } S} = 0 \quad -2 \cdot 4 + R_{A,H} \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 0$$

$$4R_{A,H} = 0$$

$$R_{A,H} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma H = 0 \quad 0 + 4 - S_H = 0$$

$$S_H = +4 \text{ kN} \leftarrow \text{(aannname richting correct)}$$

$$\Sigma V = 0 \quad -2 + S_V = 0$$

$$S_V = +2 \text{ kN} \downarrow \text{(aannname richting correct)}$$

Evenwicht spantdeel BDS:

$$\Sigma M_{\text{om } S} = 0 \quad +10 \cdot 4 - R_{B,H} \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 0$$

$$4R_{B,H} = +16$$

$$R_{B,H} = +4 \text{ kN} \leftarrow \text{(aannname richting correct)}$$

$$\Sigma V = 0 \quad -10 + 12 - S_V = 0$$

$$S_V = +2 \text{ kN} \uparrow \text{(aannname richting correct)}$$

5. Bereken en teken de N-, V- en M-lijn

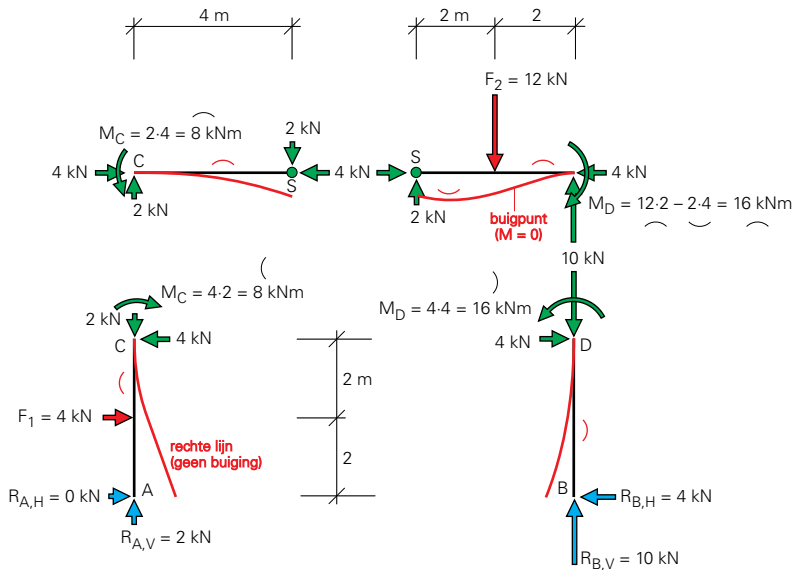
In afbeelding 5.23 zijn alle krachten en momenten weergegeven die op de afzonderlijke staven van het portaalspant werken. Ook zijn de vervormingslijnen geschetst die door deze krachten en momenten ontstaan. De snedekrachten in C en D zijn berekend met de drie evenwichtsvergelijkingen. De berekening van de momenten is bijgeschreven. Ter plaatse van F_2 snijdt de V-lijn de 0-lijn; dus hier is een maximaal veldmoment aanwezig.

Het verloop van de N-, V- en M-lijn is weergegeven in afbeelding 5.24. Een aantal kenmerken valt op.

- Oplegreactie $R_{A,V} = 2 \text{ kN}$ geeft in kolom AC een normaaldrukkracht van 2 kN. Deze normaaldrukkracht gaat in C in de ligger over in een dwarskracht van 2 kN.
- Oplegreactie $R_{B,V} = 10 \text{ kN}$ geeft in kolom BD een normaaldrukkracht van 10 kN. Deze normaaldrukkracht gaat in D in de ligger over in een dwarskracht van 10 kN.
- Scharnierkracht $S_H = 4 \text{ kN}$ geeft in beide liggerdelen een normaaldrukkracht van 4 kN. Deze normaaldrukkracht gaat in C respectievelijk in D in elke kolom over in een dwarskracht van 4 kN.

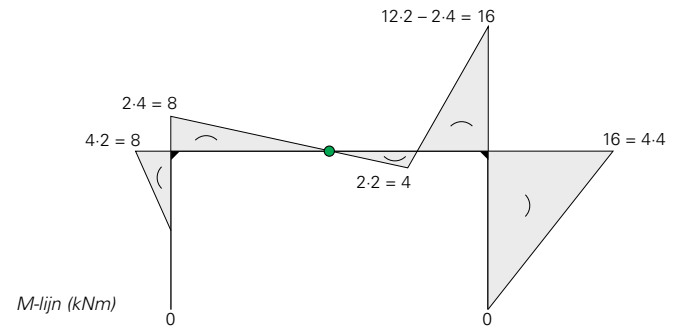
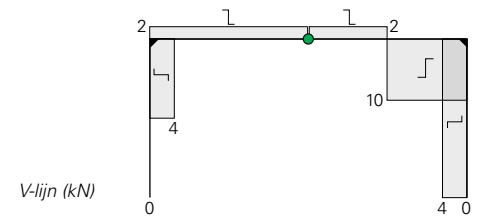
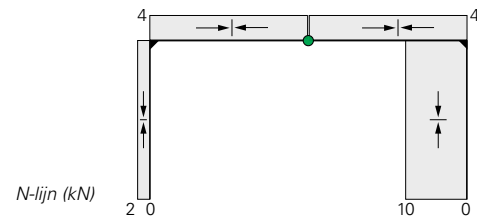
6. Schets de doorbuigingslijn

Het vooraf correct inschatten van de vervormingslijn is moeilijk. Nu de M-lijn bekend is, kan er meer worden gezegd over de vervormingslijn ten gevolge van buiging. In het onderste deel van



5.23 Portaalspant met alle krachten en momenten op de staven met de vervormingslijnen.

kolom AC is geen moment aanwezig. Over dit deel buigt de kolom dus niet. (afb. 5.23). De buigtekens in de momentenlijn van spantdeel ACS en het veldmoment in bovenregel SD komen duidelijk overeen met de doorbuigingslijn van afbeelding 5.20b. Hieruit kan de conclusie worden getrokken dat kracht $F_2 = 12 \text{ kN}$ overheerst ten opzichte van kracht $F_1 = 4 \text{ kN}$.



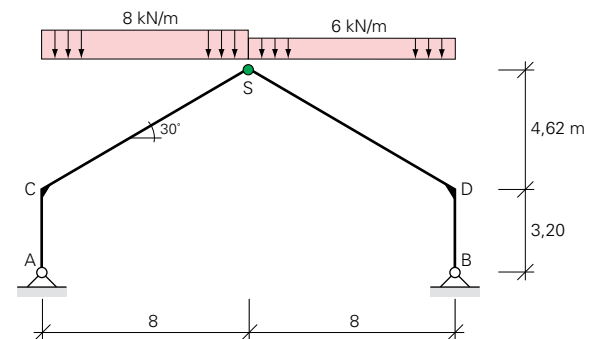
5.24 Berekening en tekening van de N-, V- en M-lijn van het portaalspant.

5.2.3 Driescharnierspant uitgevoerd als kniespant

Gegeven is een driescharnier-kniespant van een loods, uitgevoerd als een kniespant, belast door sneeuw (afb. 5.25). Sneeuwbelasting werkt loodrecht op het grondvlak en kan asymmetrisch op de constructie aangrijpen (aan de ene zijde van het dakvlak meer sneeuw dan aan de andere zijde). Van dit kniespant worden – als gevolg van alléén de sneeuwbelasting – de oplegreacties en de scharnierkrachten berekend, de N-, V - en M-lijn berekend en getekend én de doorbuigingslijn getekend.

Spantdeel ACS wordt het zwaarst belast. Omdat in de praktijk belastingen omkeerbaar zijn (het rechterdeel BDS wordt dan het zwaarst belast) is er geen praktische noodzaak ook de krachten (normaalkrachten, dwarskrachten en momenten) in het minst belaste spantdeel te berekenen.

De berekening van het kniespant verloopt in vijf stappen.

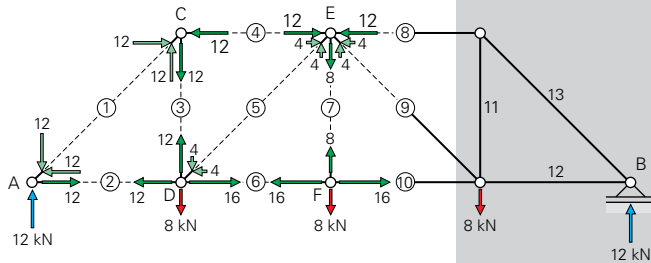


5.25 Kniespant, belast door twee lijnlasten.

Op basis van de M-lijn zijn de volgende conclusies te trekken:

- Uit het buigteken volgt dat de vakwerklijgger over de gehele lengte doorbuigt. De doorbuiging ontstaat doordat de staven 2, 6, 10 en 12 van de onderrand langer worden. De staven 1, 4, 8 en 13 van de bovenrand worden korter. De onderrand wordt dus op trek belast en de bovenrand op druk.
- Uit de plaats van M_{\max} volgt dat de bovenrandstaven 4 en 8 en de onderrandstaven 6 en 10 het zwaarst worden belast.

De diagonalen en verticalen in een vakwerklijgger worden om-en-om op trek en druk belast. Dat betekent dat de verticalen 3, 7 en 11 op trek worden belast.



6.34 De (ontbonden) krachten op de knopen A t/m F.

2. Bereken de oplegreacties

De oplegreacties volgen uit het uitwendig evenwicht. Zowel de constructie van het vakwerk als de belastingen zijn symmetrisch, zodat:

$$R_{A,V} = R_{B,V} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 \text{ kN} \uparrow$$

3. Kies en teken de eerste knoop en breng de staafkrachten aan

Begin in principe bij een oplegging. Omdat het linkerdeel van de constructie wordt berekend, is dat knoop A. Knoop A heeft twee onbekende staafkrachten. De schuine staafkracht S_1 wordt ontbonden in een horizontale en een verticale component volgens de verhoudingen 1:1: $\sqrt{2}$ van de driehoek (afb. 6.34). De richtingen van de (ontbonden) staafkrachten volgen uit het evenwicht van de knoop (stap 4).

4. Bereken de staafkrachten van knoop A

De staafkrachten S_1 en S_2 volgen uit het evenwicht van knoop A. Uit $\Sigma V = 0$ volgt: $S_{1,V} = 12 \text{ kN} \downarrow$ (druk) en voor een hoek van 45° : $S_{1,H} = 12 \text{ kN} \leftarrow$ (vanwege druk). Uit het samenstellen van $S_{1,V}$ en $S_{1,H}$ volgt $S_1 = 12\sqrt{2} \text{ kN}$ (druk). Alle (ontbonden) horizontale en verticale staafkrachten van knoop A zijn in afbeelding 6.34 bijgeschreven.

5. Bereken de overige staafkrachten

Overeenkomstig de werkwijze in stap 4 worden vervolgens de overige staafkrachten berekend. De werkvolgorde na knoop A is: knoop C, D, E en F (de knopen E en F kunnen ook in omgekeerde volgorde worden berekend). Omdat zowel de vakwerkconstructie als de belastingen symmetrisch zijn, worden de knopen E en F ook symmetrisch belast. Van dit gegeven is gebruik gemaakt. Alle staafkrachten zijn weergegeven in tabel 6.35. In de praktijk wordt een drukkracht meestal met een minteken (-) en een trekkracht met een plusteken (+) aangegeven.

staaf	staafkracht (kN)	soort kracht
1, 13	$-12\sqrt{2}$	druk
2, 12	+12	trek
3, 11	+12	trek
4, 8	-12	druk
5, 9	$-4\sqrt{2}$	druk
6, 10	+16	trek
7	+8	trek

6.35 Overzicht van staafkrachten van het vakwerk van afbeelding 6.34.

Voorbeeld 6.4

- **Gegeven.** Een vakwerklijgger met vier velden, waarbij op de bovenrand drie krachten van 8 kN aangrijpen (afb. 6.36).
- **Gevraagd.** Bereken de staafkrachten met de knooppuntmethode.
- **Uitwerking.** De berekening van de staafkrachten komt in principe overeen met die van voorbeeld 6.3. Hier worden met name de verschillen toegelicht. De berekening verloopt in vier stappen.

1. Analyseer het vakwerk

Vanwege de symmetrie hoeven uitsluitend de staven 1 t/m 9 te worden berekend. De krachten in de staven van de andere helft van het vakwerk zijn even groot. De analyse of staven op trek of op druk worden belast komt geheel overeen met de analyse van voorbeeld 6.3. Toch is er een verschil: in de vakwerklijgger van afbeelding 6.36 komen 0-staven voor. Dat zijn de staven 1 en 2 (resp. 14 en 17), die in het vakwerk van voorbeeld 6.3 ontbreken, die niet worden belast (overeenkomstig de onbelaste hoekaansluiting van afb. 6.20a).

Misschien heeft de vakwerklijgger nog meer 0-staven? Uit het evenwicht van knoop F kan op basis van $\Sigma V = 0$ worden geconcludeerd dat bij de gegeven belasting (geen uitwendige kracht op knoop F) staaf 9 ook een 0-staaf moet zijn (overeenkomstig de T-aansluiting van afb. 6.20c). Staaf 9 draagt bovendien niet bij aan de vormvastheid van de ligger en kan daarom achterwege blijven. De driehoek gevormd door de staven 7, 8, 12 en 11 vormen immers samen een vormvaste driehoek.

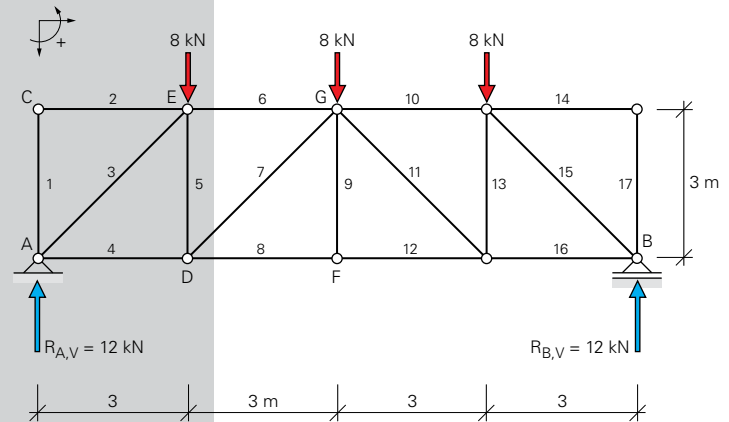
2. Bereken de oplegreacties

De oplegreacties volgen uit het uitwendig evenwicht. Zowel de constructie van het vakwerk als de belastingen zijn symmetrisch, zodat:

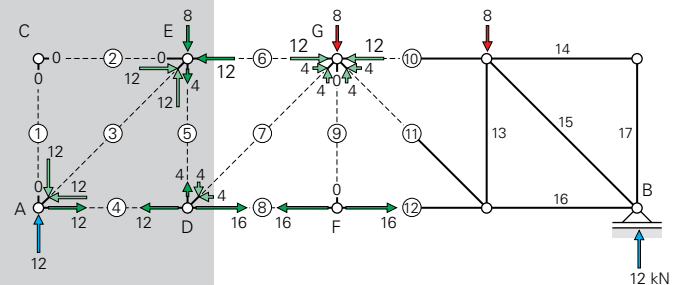
$$R_{A,V} = R_{B,V} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12 \text{ kN} \uparrow$$

3. Kies en teken de eerste knoop en breng de staafkrachten aan

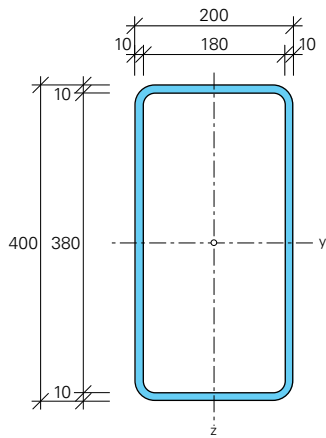
Evenals in voorbeeld 6.3 wordt ook nu vanaf oplegging A het evenwicht van de knopen bepaald (afb. 6.37). In knoop A zijn nu drie onbekende staafkrachten aanwezig (in de staven 1, 3 en 4). Er zijn slechts twee evenwichtsvergelijkingen beschikbaar: dus het evenwicht van knoop A is niet oplosbaar. Van de knopen in de omgeving van knoop A sluiten in knoop C 'slechts' twee staven aan. Echter, het evenwicht van knoop C hoeft niet meer te worden beschouwd, omdat in stap 1 al is geconstateerd dat de staven 1 en 2 beide 0-staven zijn.



6.36 Schema van een N-ligger.



6.37 De (ontbonden) krachten op de knopen A t/m G.



7.20 Rechthoekig buisprofiel.

Voorbeeld 7.5

- **Gegeven.** Een rechthoekig buisprofiel 200x400x10 (afb. 7.20).
- **Gevraagd.** Bereken het traagheidsmoment om de beide hoofdassen, waarbij de invloed van de afgeronde hoeken mag worden verwaarloosd.
- **Uitwerking.** Voor een rechthoekige massieve doorsnede volgt het traagheidsmoment uit formule (7.17). Het traagheidsmoment van het buisprofiel wordt bepaald door het traagheidsmoment van de 'holle ruimte' in mindering te brengen op dat van de massieve doorsnede:

$$I_y = I_{y,\text{massief}} - I_{y,\text{hol}} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 400^3 - \frac{1}{12} \cdot 180 \cdot 380^3 = 24359 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_z = I_{z,\text{massief}} - I_{z,\text{hol}} = \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 200^3 - \frac{1}{12} \cdot 380 \cdot 180^3 = 8199 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

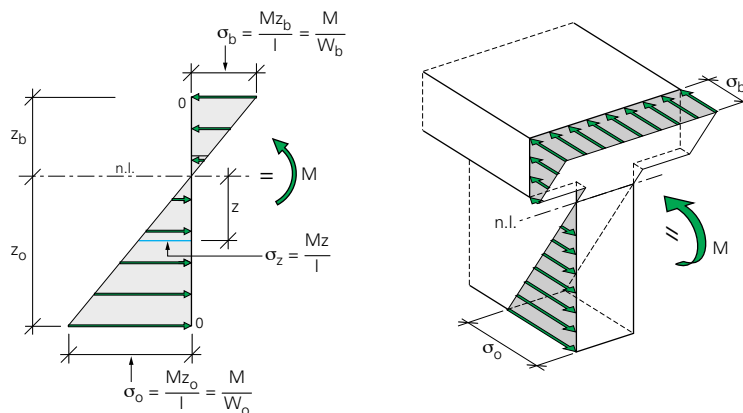
Relatie tussen het traagheidsmoment I en het elastisch weerstandsmoment W

De maximale spanningen in een doorsnede treden op in de uiterste vezels (zie afb. 7.17d). Dit volgt ook uit de formule (7.12): $\sigma = Mz/I$ wanneer voor z de uiterste vezelafstand ten opzichte van de neutrale lijn wordt ingevuld ($z = z_b$ dan wel $z = z_o$). Voor de berekening van de maximale spanningen kan buigspanningsformule (7.12) ook worden geschreven als (afb. 7.21):

$$\sigma_b = \frac{M \cdot z_b}{I} = \frac{M}{W_b} \quad \text{met} \quad W_b = \frac{I}{z_b} \quad \left(\frac{\text{mm}^4}{\text{mm}} = \text{mm}^3 \right)$$

$$\sigma_o = \frac{M \cdot z_o}{I} = \frac{M}{W_o} \quad \text{met} \quad W_o = \frac{I}{z_o}$$

(7.22)



7.21 Maximale buigspanningen treden altijd op in de uiterste vezels.

Hierin zijn W_b en W_o de elastische weerstandsmomenten waarmee de spanningen in de uiterste vezels worden berekend.

Een doorsnede heeft om een buigingsas altijd één (eigen) traagheidsmoment en altijd twee elastische weerstandsmomenten. Wanneer de neutrale lijn halverwege de hoogte van de doorsnede ligt, zoals bij symmetrische doorsnedes, geldt: $W_b = W_o$. In de praktijk wordt met het weerstandsmoment W altijd het elastisch weerstandsmoment bedoeld.

Voor de gangbare staalprofielen en houten profielen zijn het traagheidsmoment en het weerstandsmoment om de buigingsassen y en z in tabellenboeken opgenomen. Bij asymmetrische doorsnedes wordt meestal het kleinste weerstandsmoment opgenomen, omdat het kleinste weerstandsmoment de grootste spanning in de doorsnede geeft.

Elastisch weerstandsmoment afgeleid uit het verloop van de spanningen

De elastische weerstandsmomenten W_b en W_o zijn in afbeelding 7.21 berekend vanuit het traagheidsmoment I . Maar deze weerstandsmomenten kunnen ook uit het verloop van de spanningen worden afgeleid.

Voor een rechthoekige doorsnede met een lineair (elastisch) materiaalgedrag ontstaat door een buigend moment een spanningsverloop zoals in afbeelding 7.22 is weergegeven. Van het driehoekige drukspanningsfiguur boven de neutrale lijn kan een resulterende drukkracht D worden berekend volgens:

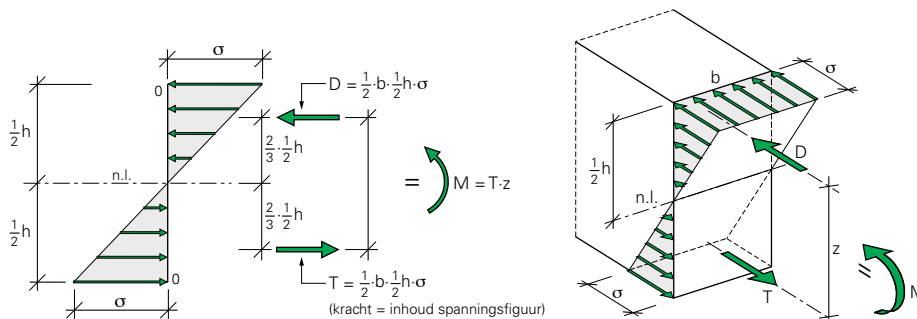
$$\text{kracht} = \text{oppervlakte} \times (\text{gemiddelde spanning}) \Rightarrow D = \left(b \cdot \frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{1}{2}\sigma$$

Evenzo geldt voor de trekspanningsfiguur onder de neutrale lijn:

$$T = \left(b \cdot \frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{1}{2}\sigma$$

De rechthoekige doorsnede is symmetrisch, zodat:

- de neutrale lijn op de halve hoogte ligt;
- de maximale spanningen boven en onder even groot zijn: $\sigma_b = \sigma_o = \sigma$.



7.22 Inwendige krachswerking bij buiging van een rechthoekige doorsnede met een lineair materiaalgedrag.

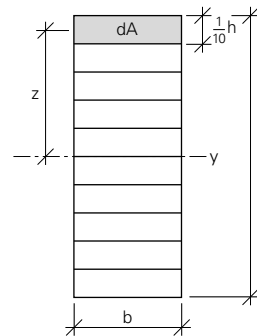
7.6 Parate kennisvragen

1. Wat is een normaalspanning?
2. Een stalen staaf wordt belast op trek respectievelijk op druk. Welke twee variabelen bepalen de weerstand van de doorsnede (de bezwijksterkte)?
3. Hoe luidt de formule voor het berekenen van de spanning door een centrische normaaltrekkraft?
4. Een staaf wordt belast op een centrische normaaltrekkraft. In welk punt van de doorsnede is de spanning het grootst?
5. Beschrijf de functie van de knikreductiefactor in de toetsingsformule voor een staaf belast op druk.
6. Hoe groot is de knikreductiefactor bij een niet-knikgevoelige staaf?
7. Een stalen kolom in een gevel van een hal bezwijkt op knik om de zwakke as. Noem twee maatregelen die de knikweerstand vergroten.
8. Wat hebben de spanningen veroorzaakt door een trekkracht en een buigend moment met elkaar gemeen?
9. Beschrijf het verband tussen het weerstandsmoment en het traagheidsmoment.
10. Hoe luidt de formule voor het berekenen van het traagheidsmoment van een rechthoekige massieve doorsnede?
11. Hoe luidt de formule voor het berekenen van het weerstandsmoment van een rechthoekige massieve doorsnede?
12. Gegeven is een T-profiel waarvan de buigingsas evenwijdig loopt met de flens. Hoeveel traagheidsmomenten heeft deze doorsnede bij buiging om deze as en hoeveel weerstandsmomenten?
13. Een doorsnede wordt belast op een buigend moment. Hoe luidt de formule om de maximale spanning in de doorsnede te berekenen?
14. Een doorsnede wordt belast door een dwarskracht. Hoe luidt de algemene formule om de spanning in de doorsnede te berekenen?
15. Hoe wordt in de praktijk de maximale schuifspanning in een rechthoekige houten doorsnede berekend?
16. Hoe wordt in de praktijk de (maximale) schuifspanning in een I-vormige doorsnede (zoals een IPE- of een HEA-profiel) berekend?
17. Wat is kip en waardoor ontstaat kip?
18. Hoe kan kip worden voorkomen? Noem een effectieve maatregel voor een stalen vloerligger en voor een vakwerklijger in het dak van een hal.
19. Wat is de functie van de kipreductiefactor in de toetsingsformule voor een staaf belast op buiging?
20. Hoe groot is de kipreductiefactor bij een niet-kipgevoelige staaf?
21. Wat is dubbele buiging?
22. Is de berekening van 'normale' liggers een momentprobleem of een dwarskrachtprobleem en waaruit blijkt dat?

23. Een ligger op twee steunpunten wordt belast door een lijnlast. Waarom kan een combinatie-toets van buigend moment en dwarskracht achterwege blijven?
24. De maatgevende doorsnede van een rechthoekige massieve houten ligger wordt belast door een combinatie van buigend moment en dwarskracht. Waarom kan een combinatie-toets van spanningen achterwege blijven?
25. De maatgevende doorsnede van een I-vormige stalen ligger wordt belast door een combinatie van buigend moment en dwarskracht. Waarom kan een combinatie-toets van spanningen achterwege blijven?

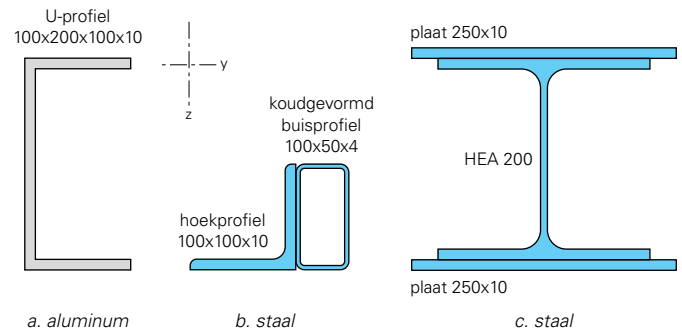
7.7 Oefenopgaven

- 1 Gegeven is een rechthoekige massieve doorsnede met afmetingen $b \times h$ (afb. 7.52). De doorsnede is verdeeld in tien oppervlakjes dA , elk met een breedte b en een hoogte $0,1h$.
 - a. Bereken het traagheidsmoment I_y uitgedrukt in b en h . Gebruik hiervoor de formule: $I_y = \sum z^2 dA$.
 - b. Hoeveel wijkt het onder a. traagheidsmoment af van de exacte waarde?
 - c. Hoe kan een grotere nauwkeurigheid worden bereikt?



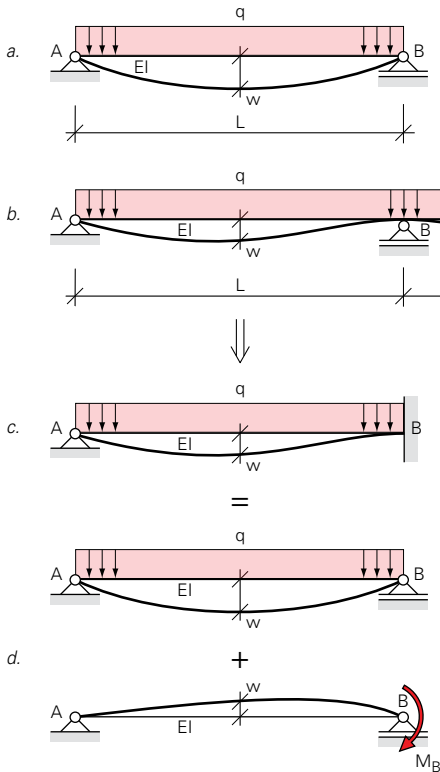
7.52 Massieve rechthoekige doorsnede verdeeld in tien oppervlakjes dA .

- 2 Gegeven zijn drie doorsneden (afb. 7.53). Doorsnede a is een geëxtrudeerd aluminiumprofiel. De stalen doorsneden b en c zijn 'samengesteld' uit verschillende profielen, waarvan de doorsnedegrootheden in een tabellenboek zijn te vinden: maak hiervan gebruik. Voor elke doorsnede wordt gevraagd:
 - a. Bepaal de ligging van het zwaartepunt.
 - b. Bereken de traagheidsmomenten I_y en I_z .
 - c. Bereken de weerstandsmomenten $W_{el,y}$ en $W_{el,z}$.



7.53 Drie doorsneden voor het bepalen van de doorsnedegrootheden I en W .

- 3 Bereken en teken van de doorsneden uit opgave 2 het verloop van de buigspanningen door een buigend moment $M_{y,Ed}$.
 - a. Doorsnede a met $M_{y,Ed} = 20$ kNm.
 - b. Doorsnede b met $M_{y,Ed} = 5$ kNm.
 - c. Doorsnede c met $M_{y,Ed} = 100$ kNm.
- 4
 - a. Bereken en teken voor doorsnede a van opgave 2 het *exacte* verloop van de schuifspanningen door een kracht $V_{z,Ed} = 60$ kN.
 - b. Bereken en teken voor doorsnede a t/m c van opgave 2 het *geschematiseerde* verloop van de schuifspanningen door een kracht $V_{z,Ed} = 60$ kN.



8.9 Doorbuiging van een ligger op twee steunpunten én van een doorgaande symmetrische ligger op drie steunpunten.

Er zijn nog twee variabelen die van grote invloed is op de doorbuiging: namelijk de wijze waarop ligger is opgelegd én of de ligger doorgaand is uitgevoerd.

Vanwege symmetrie kan de doorgaande, statisch onbepaalde ligger op drie steunpunten van afbeelding 8.9b worden geschematiseerd tot een ligger op twee steunpunten met in steunpunt B een inklemming (afb. 8.9c). Zowel de V- en M-lijn én het verloop van de doorbuiging zijn voor de liggers b en c exact hetzelfde. Voor deze ligger is het vergeet-mij-nietje voor de doorbuiging (zie bijlage B):

$$w = \frac{2qL^4}{384EI} \quad (8.9)$$

De doorbuiging van de doorgaande ligger is maar liefst 2,5 keer kleiner dan van een ligger op twee steunpunten, zie formule (8.8). De doorgaande ligger buigt minder door, omdat het steunpuntsmoment M_B de ligger naar boven opbuigt. Het vergeet-mij-nietje van formule (8,9) kan eenvoudig worden afgeleid door afbeelding 8.9c te splitsen in twee deelsommen, die elk een 'vergeet-mij-nietje' zijn (afb. 8.9d). De doorbuiging wordt als volgt berekend:

$$w = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{ML^2}{16EI} \quad (8.10)$$

Combinatieformule (8.10) met q en M komt vaak voor en wordt altijd gebruikt bij liggers die over het steunpunt doorlopen! Bij deze doorgaande ligger, die vanwege symmetrie als een éézijdig ingeklemde ligger kan worden geschematiseerd, is (zie bijlage B):

$$M_B = \frac{1}{8}qL^2 \quad (8.11)$$

Dit geeft een doorbuiging:

$$w = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{1}{8}qL^2 \cdot L^2 = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{qL^4}{128EI} = \frac{2qL^4}{384EI} \quad (8.12)$$

Uit dit voorbeeld blijkt het belang van statisch onbepaalde liggers: de doorbuiging blijft beperkt. Het leidt tot minder hoge liggers (en minder dikke vloeren) wanneer niet de sterkte maar de stijfheid (de doorbuiging) maatgevend is. Hetzelfde resultaat wordt bereikt wanneer de doorgaande ligger van afbeelding 8.9b als een scharnierligger wordt uitgevoerd. Door in het buigpunt van de doorbuigingslijn (waar $M = 0$) een scharnier aan te brengen geeft dit exact dezelfde V-, M- en w-lijn als van de ligger van afbeelding 8.9b.

Van vijf stalen liggers worden met de vergeet-mij-nietjes (zie bijlage B) de hoekverdraaiingen ϕ , de verticale doorbuigingen w en – indien aanwezig – de horizontale uitwijkingen u berekend. De hoekverdraaiingen worden uitgedrukt in radialen ($1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$). De doorbuigingen worden altijd halverwege de overspanning berekend: dit bespaart een grote hoeveelheid rekenwerk en is voor de bouwpraktijk voldoende nauwkeurig.

Voorbeeld 8.5

- **Gegeven.** Een ligger HEA 200 op twee steunpunten, belast door een lijnlast van 5 kN/m (afb. 8.10).
- **Gevraagd.** Schets de vervormingslijn en bereken ϕ_A , ϕ_B en w_{AB} ($= w_{\max}$).
- **Uitwerking.** De vervormingslijn is geschetst in afbeelding 8.10. De gevraagde vervormingen zijn:

$$\phi_A = \phi_B = \frac{qL^3}{24EI_y} = \frac{5 \cdot 4000^3}{24 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 3692 \cdot 10^4} = 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ rad } (= 0,1^\circ)$$

$$w_{A-B} = \frac{5qL^4}{384EI_y} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4000^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 3692 \cdot 10^4} = 2,1 \text{ mm } \downarrow$$

Voorbeeld 8.6

- **Gegeven.** Een ligger IPE 220 op twee steunpunten met een overstek. De ligger wordt tussen A en B belast door een verticale puntlast van 8 kN (afb. 8.11).
- **Gevraagd.** Schets de vervormingslijn en bereken w_{A-B} en w_C .
- **Uitwerking.** De puntlast tussen A en B geeft in A en B een even grote hoekverdraaiing. Links en rechts van een snede is de hoekverdraaiing altijd even groot. Ter plaatse van oplegging B is: $\phi_{BA} = \phi_{BC} = \phi_B$.

$$\phi_B = \frac{FL_{AB}^2}{16EI_y} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 4000^2}{16 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2772 \cdot 10^4} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

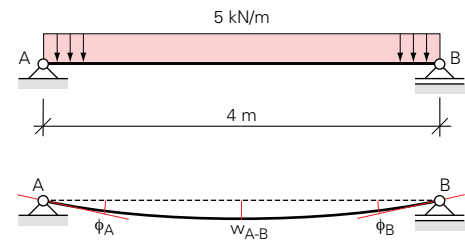
Door de hoekverdraaiing in B verdraait liggerdeel BC. De verplaatsing w_C wordt bepaald door de grootte van hoekverdraaiing ϕ_B én de lengte L_{BC} van het overstek. De verplaatsing die door een hoekverdraaiing ontstaat wordt het kwispeleffect genoemd. De lengte L_{BC} heet de kwispellengte.

$$w_C = \tan \phi_B \cdot L_{BC} = \phi_B \cdot L_{BC} = 1,37 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 = 2,7 \text{ mm } \uparrow$$

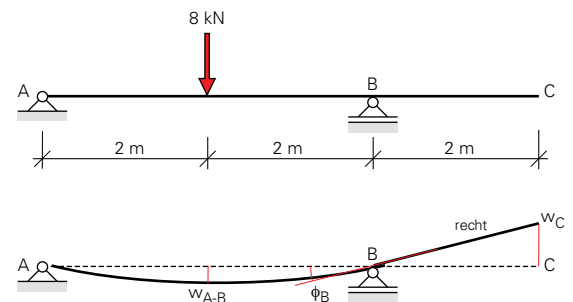
Opmerking. De tangens van een kleine hoek uitgedrukt in radialen is gelijk aan die hoek: $\tan \phi_B \approx \phi_B$ (ga dit na).

Het overstek (zonder belasting) heeft geen invloed op doorbuiging w_{A-B} , zodat:

$$w_{A-B} = \frac{FL_{AB}^3}{48EI_y} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 4000^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2772 \cdot 10^4} = 1,8 \text{ mm } \downarrow$$



8.10 Schema en vervormingen van een ligger op twee steunpunten.



8.11 Schema en vervormingen van een ligger op twee steunpunten met een overstek.

Wiskundige relaties tussen belasting en doorbuiging

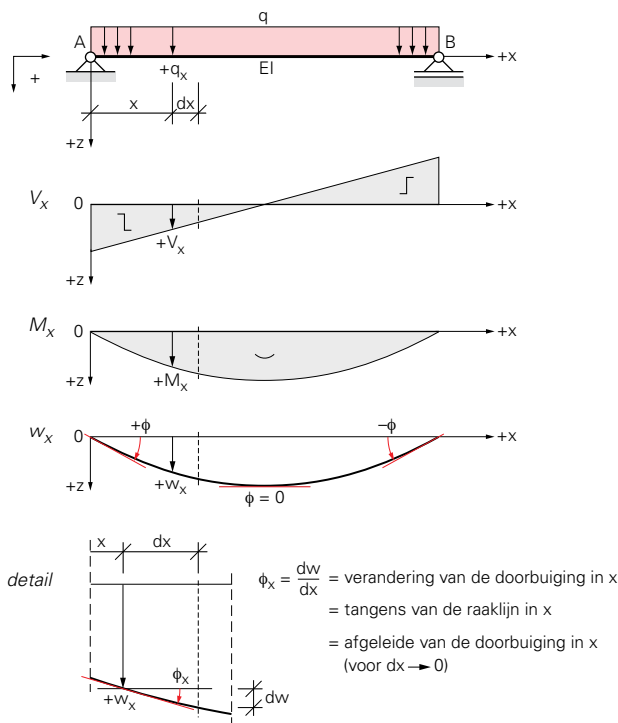
Staven kunnen op drie manieren uitwendig worden belast: *evenwijdig met de staafas, dwars op de staafas én om de staafas*. Liggers worden (meestal) dwars op de staafas belast, waardoor dwarskrachten en buigende momenten in de ligger ontstaan. De ligger zal ook vervormen. Er ontstaan buigstralen, hoekverdraaiingen en de ligger zal doorbuigen. Wiskundig bestaat er een verband tussen de belasting q dwars op de staafas, de dwarskracht V , het buigend moment M , de buigstraal R , de hoekverdraaiing ϕ en de doorbuiging w van de ligger. Deze snedekrachten en vervormingen zijn te beschrijven in vergelijkingen en grafisch in 'lijnen' weer te geven. In deze bijlage worden deze verbanden beschreven en de vergelijkingen opgesteld van eenvoudige belastinggevallen. De vergelijkingen komen tot stand door integreren. Door differentiëren kunnen specifieke kenmerken, zoals de maximale waarden, worden bepaald. Kennis van integreren en differentiëren is daarom een vereiste voor het opstellen van de vergelijkingen en voor het begrijpen van de onderlinge relaties.

Uit het wiskundige verband volgt de methode van oppervlaktebepaling, die handig is in de praktijk. Daardoor kan het opstellen van vergelijkingen achterwege blijven. Specifiek voor het berekenen van de hoekverdraaiing en de doorbuiging wordt vanuit deze methode 'de methode van het gereduceerde momentenvlak' afgeleid. Aan de hand van voorbeelden worden beide methoden toegelicht, waarbij tevens een aantal basisgevallen worden afgeleid die 'vergeet-mij-nietjes' worden genoemd, zie bijlage B (Basisbelastinggevallen en 'vergeet-mij-nietjes').

Positieve richtingen

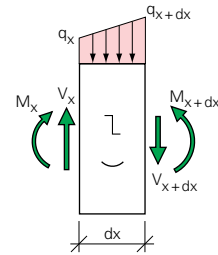
Allereerst wordt vastgelegd welke richtingen positief worden aangenomen. In afbeelding A.1 wordt een ligger op twee steunpunten belast door een gelijkmatig verdeelde lijnlast. Aan de ligger wordt een x/z -assenstelsel toegevoegd. De afspraak voor het positieve assenstelsel van de ligger is:

- de oorsprong ligt in A;
- de x -as ligt evenwijdig aan de staafas (in het zwaartepunt van de doorsnede);
- de z -as wijst naar beneden (omdat een ligger meestal naar beneden doorbuigt);
- de draairichting voor de hoekverdraaiing is positief vanaf de positieve x -as naar de positieve z -as.



A.1 Positieve assenstelsel met een positief respectievelijk negatief verloop van q , V , M , ϕ en w .

Ook is gedefinieerd wanneer de belasting, de dwarskracht, het buigend moment en de doorbuiging positief is. In afbeelding A.2 is een mootje ligger getekend met een lengte dx op een afstand x van A. De aangegeven belasting q en de snedekrachten V en M zijn positief. Dat betekent dat de V -, M - en w -lijn voor een ligger op twee steunpunten belast door gelijkmatig verdeelde lijnlast wordt getekend zoals in afbeelding A.1 is weergegeven.



A.2 Mootje ligger met positieve q , V en M .

A.1 Vergelijkingen van de q -, V -, M -, ϕ - en w -lijn

De V -lijn en de M -lijn van afbeelding A.1 kunnen worden bepaald met de drie evenwichtsvergelijkingen. De doorbuigingslijn kan worden getekend zoals wordt verwacht. Maar elk van deze lijnen is ook wiskundig te beschrijven door een vergelijking. Vervolgens kunnen vanuit deze vergelijkingen in elk punt van de staaf de grootte van de dwarskracht, moment, hoekverdraaiing en doorbuiging worden berekend.

De relatie tussen de belasting q in formule (A.1) en doorbuiging w in formule (A.5) wordt, met integreren, in vijf stappen bepaald:

$$1: \text{belasting} \quad q_x = +q \quad (\text{A.1})$$

$$2: \text{dwarskracht} \quad V_x = -\int q_x dx \quad (\text{A.2})$$

$$3: \text{moment} \quad M_x = \int V_x dx = -\int \int q_x dx \quad (\text{A.3})$$

$$\text{kromming} \quad \kappa_x = \frac{1}{R_x} = -\frac{M_x}{EI} \quad (R_x \text{ is buigstraal})$$

$$4: \text{hoekverdraaiing} \quad \phi_x = -\int \frac{M_x dx}{EI} = \int \int \int \frac{q_x dx}{EI} \quad (\text{A.4})$$

$$5: \text{doorbuiging} \quad w_x = \int \phi_x dx = \int \int \int \int \frac{q_x dx}{EI} \quad (\text{A.5})$$

De belasting $q_x = +q$ is een lijnlast met een constante grootte (gelijkmatig verdeeld). Maar de belasting kan ook een eerstegraads, of algemeen uitgedrukt, een n -de-graads vergelijking zijn. Dan is deze vergelijking het uitgangspunt voor het integreren.

Met de integralen in de formules (A.2) t/m (A.5) kan voor elke ligger (belast door een gelijkmatig verdeelde q -last) van elke 'lijn' de vergelijking worden opgesteld (zie paragraaf A.1.1 en A.1.2). De integralen in formule (A.2) en (A.3) worden uit het evenwicht van een mootje ligger met lengte dx bepaald (afb. A.2)). Door het belasten ondergaat de ligger een vormverandering. Voor een lineair-elastisch materiaalgedrag ($E = \text{constant}$) kunnen door de introductie van de buigstijfheid EI (het product van de elasticiteitsmodulus E en het traagheidsmoment I) de formules (A.3) t/m (A.5) worden afgeleid. Met deze integralen wordt het verband tussen de belasting q , de kromming κ , de hoekverdraaiing ϕ en de doorbuiging w beschreven. De afleidingen van de integralen van de formules (A.2) t/m (A.5) vallen buiten het kader van dit boek.